УДК 512.552.1

НАПІВДОСКОНАЛІ НАПІВДИСТРИБУТИВНІ КІЛЬЦЯ.

Ю. В. Яременко.

Розглянуто властивості напівдосконалих напівдистрибутивних кілець. Доведено, що нетерове напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце з ациклічним сагайдаком – бірядне.

There we describe the property of semi–perfect semi–distributive rings. We prove that any noetherian semi–perfect ring of distributive module type with an acyclic quiver is biserial.

На сьогодні роль “елементарних” об’єктів, до яких зводиться вивчення більш складних об’єктів, в багатьох випадках в теорії кілець відіграють дистрибутивні кільця і модулі, хоч вони і самі по собі мають досить цікаву структуру. Вивченню дистрибутивних і напівдистрибутивних кілець та модулів над ними присвячено багато робіт відомих алгебраїстів: Брунгса, Камілло, Колбі, Фуллера, Туганбаєва і ін. Результати досліджень опубліковані в книзі [1].

Одним із прикладів дистрибутивних кілець є комутативна алгебра. Так, дедекіндові кільця (наприклад, кільце цілих чисел або кільце многочленів від однієї змінної над полем) є дистрибутивними кільцями. Як показали Албу і Настасеску [2] модулі Безу над комутативними кільцями будуть дистрибутивними модулями (модулем Безу називається модуль, у якого всі скінченнопороджені підмодулі циклічні). Як показав Йенсен [3] дистрибутивність комутативного кільця рівносильна тому, що всі його локалізації за максимальним ідеалом є ланцюговими кільцями. Дистрибутивним модулям присвячений підрозділ 4.1 книги Кона [4].

Серед робіт про дистрибутивні кільця й модулі в некомутативному випадку можна відмітити роботи Брунгса, Камілло, Менцеля, Стефенсона.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо для будь-яких його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$

Цоколем модуля називається сума всіх його мінімальних підмодулів, тобто простих модулів.

Камілло [5] довів, що модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли цоколь будь-якого його фактормодуля не містить квадратів:

Теорема 1 [5]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі з точністю до ізоморфізму не більше одного примірника кожного простого модуля.*

Зрозуміло, що будь-який підмодуль і будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивні.

Пряма сума дистрибутивних модулів називається *напівдистрибутивним модулем.*

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва),* якщо воно є напівдистрибутивним правим (лівим) модулем над собою.

Напівдистрибутивне справа і зліва кільце називається *напівдистрибутивним.*

Кільце A називається *напівдосконалим,* якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [6].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R, якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що

$e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 2 [7,с.281]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли воно розпадається в пряму суму правих ідеалів, кожен з яких має рівно один максимальний підмодуль.*

Теорема 3 [8]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли його одиниця розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ - такий розклад одиниці напівдосконалого кільця A в суму попарно ортогональних ідемпотентів, що $f_i A = P_i^{k_i}$ $(i = 1, \dots, s)$. Позначимо

$$A_{ij} = f_i A f_j,\ (i, j = 1, \dots, s)$$

і розглянемо двосторонній пірсовський розклад кільця A відносно розкладу

$$1 = f_1 + \dots + f_s : \quad A = \bigoplus_{i,j=1}^{s} A_{ij}. \tag{1}$$

Таким чином кільце А зображується у вигляді кільця матриць з елементами A_{ij} із звичайними операціями додавання і множення [9,с.31]:

Кільця A_{ii} ізоморфні кільцям $End_A P_i^{n_i} \cong M_{n_i}(End_A P_i)$, де $End_A P_i = Q_i$ - локальне кільце $(i=1,\dots,s)$ $(M_n(B)$ - кільце всіх квадратних матриць порядка n з коефіцієнтами із $B)$.

Через R_i позначимо радикал Джекобсона кільця A_{ii} $(i = 1, \dots, s)$. Для радикала R кільця A, представленого у вигляді (1), має місце наступний двосторонній пірсовський розклад:

$$R = \bigoplus_{i,j=1}^{s} f_i R f_j, \tag{2}$$

де $f_i R f_i = R_i$ і $f_i R f_j = A_{ij}$ $(i \neq j : i, j = 1, \dots, s)$

Таким чином, будь-яке напівдосконале кільце A представляється у вигляді прямої суми правих ідеалів: $A = P_1^{k_1} \oplus \dots \oplus P_s^{k_s}$, де $P_1, \dots, P_s$ – попарно неізоморфні модулі і фактормодулі $P_i / P_i R = U_i$ - прості $(i = 1, \dots, s)$.

Модулями $P_1, \ldots, P_s$ вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, всі нерозкладні проективні A-модулі, а модулями $U_1, \ldots, U_s$ – всі попарно неізоморфні прості A-модулі ([10], § 1).

Напівдосконале кільце A називається *зведеним,* якщо факторкільце A / R є прямим добутком тіл.

В силу теореми Моріти категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалого кільця A в пряму суму головних A-модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму нерозкладних проективних модулів: $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$.

Простий модуль над зведеним напівдосконалим кільцем не анулюється одним локальним ідемпотентом, тобто має місце

Лема 1. [11,с.47]. *Мають місце рівності* $U_ie_j = 0$, $e_jV_i = 0$ *при* $i \neq j$ *і* $U_ie_i = U_i$, $e_iV_i = V_i$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Відомий критерій напівдистрибутивності напівдосконалого кільця, який належить А.А. Туганбаєву [1]:

Теорема 4. *Напівдосконале кільце A напівдистрибутивне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких локальних ідемпотентів e і f кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf-модулем (ланцюговим лівим eAe-модулем).*

Для доведення теореми 4 можна використати наступне твердження (див., наприклад, [12], § 3.7).

Твердження 1. *Нехай A – напівдосконале кільце і* $1 = e_1 + \cdots + e_n = f_1 + \cdots + f_m$ *- два розклада одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів. Тоді* $m = n$ *і існують обернений елемент a і підстановка* $i \to \sigma(i)$ *такі, що*

$e_i = af_{\sigma(i)} a^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Очевидно, можна вважати кільце A зведеним. Будемо доводити твердження для правого випадку. Нехай $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$ - розклад кільця A в пряму суму попарно неізоморфних нерозкладних проективних A-модулів, $1 = f_1 + \cdots + f_s$ - відповідний розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = f_i A f_j$. Покажемо, що якщо кільце A напівдистрибутивне справа, то A_{ij} – ланцюговий правий A_{jj}–модуль.

Дійсно, якщо A_{ij} не є ланцюговим правим A-модулем, то існують підмодулі X_1 і X_2 модуля A_{ij} такі, що знайдуться елементи $x_1 \in X_1$ і $x_2 \in X_2$, причому $x_1 \notin X_2$ і $x_2 \notin X_1$. Покладемо $N = x_1A_{jj} + x_2A_{jj}$ і $\tilde{N} = N A$. Якщо N – циклічний A_{jj}-модуль, то у нього рівно один максимальний підмодуль, і або $N = x_1A_{jj}$, або $N = x_2A_{jj}$, що суперечить вибору елементів x_1 і x_2. В силу представлення (2) для радикала R і леми 1 маємо: $\tilde{N} / \tilde{N} R = U_j \oplus U_j$, де $U_j = P_j$

$/ P_j R$. Тому в силу теореми 1 модуль $\tilde{N}$ не дистрибутивний. Отже, A_{ij} – ланцюговий правий A_{jj}-модуль.

Покажемо, що для будь-яких двох локальних ідемпотентів e і f з кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf-модулем. Позначимо $f = f_1$ і $e = e_1$.

Нехай $1 = e_1 + \cdots + e_n = f_1 + \cdots + f_n$ - два розклади $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів. В силу твердження 1 $e_1 = af_{\sigma(1)} a^{-1}$. Тоді правий A_{11}–модуль $e_1 A f_1 = a f_{\sigma(1)} a^{-1} A f_1 = a A_{\sigma(1)1}$ ізоморфний до правого A_{11}–модуля $A_{\sigma(1)1}$ (ізоморфізм здійснюється множенням зліва на оборотний елемент $a \in A$). Тому eAf – ланцюговий правий fAf-модуль.

Покажемо тепер, що якщо eAf – ланцюговий правий fAf–модуль для будь-яких локальних ідемпотенів e і f кільця A, то кільце A напівдистрибутивне справа.

Будь-який підмодуль M нерозкладного проективного модуля $P = eA$ має вигляд $M = Mf_1 \oplus \cdots \oplus Mf_s$, де знак прямої суми означає пряму суму абелевих груп. Покажемо, що в цоколь фактормодуля P/M входить, з точністю до ізоморфізму , не більше одного примірника кожного простого модуля. Нехай N – такий підмодуль модуля P, що $N \supset M$ і фактормодуль

N/M простий. За лемою 1 існує єдиний номер i, для якого Nf_i строго містить Mf_i. Це означає, що $N/M \cong U_i$. Якщо $N_1 \supset M$ – інший підмодуль модуля P такий, що $N_1/M \cong U_i$, то $N_1 f_i$ строго містить Mf_i і $N_1 f_k = Mf_k$ при $k \neq i$. Оскільки eAf_i – ланцюговий правий A_{ii}–модуль, то, очевидно, $N_1 f_i = Nf_i$. Тому $N_1 = N$ і модуль P дистрибутивний в силу теореми 1. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай A – напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ - розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів. Кільце A напівдистрибутивне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких ідемпотентів e_i і e_j $(i \neq j)$ з вказаного розкладу кільце $(e_i + e_j) A (e_i + e_j)$ напівдистрибутивне справа (зліва).*

Наслідок 2. *Нехай A – нетерове напівдосконале напівдистрибутивне кільце, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ - такий же розклад, як і в попередньому наслідку, $A_{ij} = e_i A e_j$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_{ii}.. Тоді $R_i A_{ij} = A_{ij} R_j$, $(i, j = 1, \ldots, n)$.*

Нагадаємо, що *напівмаксимальним* кільцем називається напівдосконале напівпервинне нетерове справа кільце A, у якого для будь-якого локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [13].

Теорема 5 [13]. *Будь-яке напівмаксимальне кільце ізоморфне прямому добутку первинних кілець вигляду*

$$I_k = \begin{pmatrix} O & \pi^{\alpha_{12}}O & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}O \\ \pi^{\alpha_{21}}O & O & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}O & \pi^{\alpha_{n2}}O & \cdots & O \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де $n \geq 1$; O – дискретно нормоване кільце з простим елементом π; α_{ij} – цілі раціональні числа, причому $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k ($a_{ii} = 0$ для будь-якого і). Таке кільце нетерове з двох сторін.

Зауваження. Кільце O вважається вкладеним у його тіло часток D і двосторонній пірсовський розклад (3) означає сукупність усіх тих матриць $(a_{ij}) \in M_n(D)$, у яких $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}O$.

Теорема 6 [14]. *Наступні умови рівносильні для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A:*

(а) кільце A – напівдистрибутивне;

(б) кільце A є прямим добутком напівпростого артинового кільця і напівмаксимального кільця.

Теорема 7 [15]. *Локальне нетерове справа кільце ϑ є ланцюговим тоді і тільки тоді, коли воно є або дискретно нормованим кільцем, або артиновим ланцюговим кільцем (однорядним кільцем Кете).*

Так як згідно [16] спадкове справа напівдосконале напівдистрибутивне справа кільце є нетеровим справа то отримаємо:

Наслідок 3. *Спадкове справа локальне кільце є напівдистрибутивним тоді і тільки тоді, коли воно або дискретно нормоване кільце, або тіло.*

Відомо, що спадкове кільце є кусковою областю.

Нагадаємо, що напівдосконале кільце A називається *кусковою областю*, якщо будь-який ненульовий гомоморфізм нерозкладних проективних A-модулів є мономорфізмом.

Кускова область A має наступний двосторонній пірсовський розклад [17]:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & A_2 & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_t \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $A_1, \dots, A_t$ – первинні кільця і первинний радикал I кільця A має вигляд:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & 0 & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тому $\overline{A} = A / I \cong A_1 \times \cdots \times A_t$.

Наслідок 4. *Кускова область A як абелева група розкладається в пряму суму кільця A_0, ізоморфного $\overline{A}$, і первинного радикала I: $A = A_0 \oplus I$.*

Твердження 2. *Якщо A – спадкове справа напівдосконале напівдистрибутивне кільце, а e – ненульовий ідемпотент кільця A, то кільце eAe також спадкове справа напівдосконале напівдистрибутивне кільце.*

Доведення випливає з теореми 4.

Нехай тепер A – спадкове справа кільце. Вияснимо якими є кільця $A_1, \ldots, A_t$. За твердженням 2 це первинні спадкові справа напівдосконалі напівдистрибутивні кільця, які згідно теореми 6 є або простими артиновими кільцями, або первинними спадковими напівмаксимальними кільцями.

Отже, отримали теорему:

Теорема 8. *Всяке спадкове справа напівпервинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце є скінченним прямим добутком первинних кілець. Всяке спадкове справа первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце еквівалентне в сенсі Моріти або тілу, або кільцю $H_s(\vartheta)$, де ϑ - дискретно нормоване кільце.*

Позначимо $M_n(R)$ кільце всіх дійсних матриць порядку n.

Матрицю $B \in M_n(R)$ назвемо *перестановочно звідною*, якщо існує перестановочна матриця P така, що $P^T BP = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де B_1 та B_2 квадратні матриці порядку меншого ніж n. В противному випадку матриця називається *перестановочно незвідною*.

Скінченний орієнтований граф називається *сильнозв'язаним,* якщо є орієнтованим шлях між довільними двома його точками.

Нагадаємо означення сагайдака нетерового справа напівдосконалого кільця.

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, $P_1, \ldots, P_s$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Нехай проективне накриття $P(P_iR)$ модуля P_iR має вигляд

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad (\boldsymbol{i,j = 1, \ldots, s}).$$

Співставимо модулям $P_1, \ldots, P_s$ вершини (точки) $1, \ldots, s$ і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q(A)$.

Позначимо $[Q]$ матрицю суміжності вершин сагайдака Q.

Твердження 3 [18]. *Сагайдак Q є сильнозв'язаним, тоді і тільки тоді, коли матриця $[Q]$ є перестановочно незвідною.*

Відмітимо, що перенумерація точок сагайдака Q перетворює матрицю $[Q]$ в матрицю $P^T[Q]P$.

Твердження 4 [18]. *Існує перестановочна матриця P така, що*

$$P^T[Q]P = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ 0 & B_2 & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_t \end{pmatrix},$$

де матриці $B_1, \ldots, B_t$ є перестановочно незвідними .

Сагайдак називається *ациклічним*, якщо він не містить орієнтованих циклів.

Наслідок 5. *Якщо сагайдак нетерового напівдосконалого кільця ациклічний, то кільце має верхній трикутний вигляд, причому по діагоналі стоять тіла.*

Наслідок 6. *Нехай A – нетерове напівдосконале напівдистрибутивне зведене кільце з ациклічним сагайдаком. Тоді існує розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів такий, що кільце має вигляд (4), де кільця $A_1, \ldots, A_t$ є тілами, а A_{ij} або нуль, або є одновимірним правим A_j простором і одновимірним лівим A_i простором. Зокрема, якщо кільце A нерозкладне в прямий добуток кілець, то можна вважати всі тіла D_{ii} $(i=1,\ldots,n)$ ізоморфними одному і тому ж тілу D.*

Напівдосконале кільце A називається кільцем *дистрибутивно модульного типу*, якщо довільний правий скінчено зображуваний A-модуль напівдистрибутивний.

У роботі [19] доведено, що напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце – напівдистрибутивне.

Нерозкладний модуль M називається *бірядним*, якщо він (тобто структура його підмодулів) дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулю) такі, що K_1+K_2 є M, або найбільший власний підмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ є нуль або найменший ненульовий підмодуль в M.

Напівдосконале кільце A називається *бірядним*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A-модуль бірядний.

Нехай число вершин сагайдака $Q(A)$ дорівнює n і це вершини $1,\ldots,n$, причому з вершини i у вершину j іде t_{ij} стрілок. Тоді новий сагайдак $RQ(A)$ складається з вершин $1,\ldots, n$ та $\tau_1,\ldots,\tau_n$, де вершини $\tau_1,\ldots,\tau_n$ попарно різні. Сагайдак $RQ(A)$ є дводольним графом (стрілки ідуть тільки з вершин, що лежать у множині $\{1,\ldots,n\}$ у вершини, що лежать у множині $\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$, причому з вершини i у вершину τ_j йде t_{ij} стрілок).

Такий сагайдак $RQ(A)$ будемо називати *подвоєнням сагайдака Q*.

Якщо в сагайдаці $RQ(A)$ опустити напрямок всіх стрілок, то одержимо неорієнтований граф, який позначимо $\overline{RQ(A)}$.

Теорема 9 [19]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого кільця A, квадрат радикала Джекобсона якого дорівнює нулю:

(1) A – кільце дистрибутивно модульного типу ;

(2) A – бірядне і $\overline{RQ(A)}$ є незв'язним об'єднанням неорієнтованих ланцюгів.

Нехай A – бірядне кільце. Тоді за теоремою 1 [20] з кожної точки $Q(A)$ виходить не більш двох стрілок і в кожну точку $Q(A)$ входить не більш двох стрілок і в $Q(A)$ немає кратних стрілок.

Довільний скінченний орієнтований граф, що задовольняє цим умовам будемо називати *бірядним*.

Теорема 10 [19]. *Наступні умови рівносильні для скінченного орієнтованого графа Q без кратних стрілок:*

(1) *граф Q – бірядний;*

(2) *неорієнтований граф* $\overline{RQ}$ *є незв'язним об'єднанням циклів і ланцюгів.*

Теорема 11. *Нетерове напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце з ациклічним сагайдаком є бірядним кільцем.*

Доведення теореми випливає із наслідка 6 та теорем 9 і 10.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Tuganbaev A.A. Semidistributive Modules and Rings // Kluwer Academic Publishers. – 1998.
2. Albu T., Nastasescu C. Modules arithmetiques // Acta math. Acad. sci. hung. – 1974. – V. 25, № 3-4. – P. 299-311.
3. Jensen C.U. A remark on arithmetical rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 15. – P.951-954.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
5. Camillo V.P. Distributive modules // J.Algebra. – 1975. – V. 36, № 1. – P. 16-25.
6. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
7. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
8. Muller B.J. On semi-perfect rings // Illinois J.Math. – 1970. – V. 14, № 3. – P. 464-467.
9. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
10. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
11. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
12. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
13. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1976. – Т. 57. – С. 100-116.
14. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики, 1993. – С. 457-480.
15. Кириченко В.В., Могилёва В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. Полусовершенные слабопервичные кольца и кусочные области // Алгебраические исследования: Сборник статей. - Киев: Изд. Института математики НАН Украины, 1995. – С. 33-65.
16. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.
17. Gordon R., Small L.W. Picewise domains // J.Algebra. – 1972. – V. 23, № 3. – P. 553-564.
18. Kirichenko V. Decomposition theorems for semi-perfect rings // Mat. Studii. – 1997. – V. 8, № 2. – P. 157-161.
19. Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В. Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними // Сб. ,,Алгебраические исследования”. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С.5-32.
20. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.